Le Journal

www.mathemaroc.com
Volume : 1, N°: 6, 2019

Le Journal

Vol. 1, N° 6, 2019

Rédacteur en chef : Mouad Moutaoukil

Rédacteurs de ce numéro :

- Abdelkader Benaissat
- Mouad Moutaoukil
- Rim Hariss
- Saad Choukri

Design : Abdelkader Benaissat

Math&Maroc est une revue mathématique publiée, désormais quadrimestriellement, par l'association du même nom. Elle propose, en plus de rubriques diverses, des cours et des problèmes à résoudre de niveau secondaire. Nous vous invitons à nous envoyer tous vos commentaires, remarques et suggestions en nous contactant à l'adresse : mouadmoutaoukil@hotmail.com. Nous sommes aussi intéressés par de nouveaux problèmes. Tout problème proposé devrait s'accompagner d'une solution, ou au moins d'informations suffisantes pour indiquer qu'une solution est possible. Veuillez inclure toute référence ou réflexion qui pourrait aider les rédacteurs et rédactrices. Nous vous invitons particulièrement à envoyer des problèmes originaux. Toutefois, tout problème intéressant quoique non original est le bienvenu pour autant qu'il soit accompagné des références nécessaires. Dans ce cas-là, il faut obtenir la permission de l'auteur avant de publier le problème.

Le journal est aussi ouvert à de nouveaux articles ou de nouveaux cours. Les articles devraient être soigneusement rédigés et raisonnablement courts. Ils devraient être d'un niveau accessible à des élèves de collège ou de lycée.

N'hésitez pas à nous contacter pour toute information complémentaire.

Éditorial :

Le Maroc connaît un progrès incontestable en Mathématiques, surtout olympiques. Il vient de le prouver encore une fois en décrochant la première place aux PAMO (Olympiades Pan Africaines de Mathématiques), qui viennent d'être clôturées en Afrique du Sud. Les six participants, fierté de la nation, sont revenus directement pour prendre part au stage olympique à Rabat, stage lors duquel a été sélectionnée l'équipe nationale qui représentera le Maroc aux Olympiades Internationales de Mathématiques 2019, qui se déroulera en Angleterre pendant le mois de juillet.

Coïncidant avec toutes ces nouveautés, la publication du Journal de Math&maroc reprend ! Après 5 numéros publiés en 2017 et 2018 -que vous pouvez toujours consulter sur le site de l'association-, il devient désormais quadrimestriel, attendez-vous donc à un nouveau numéro chaque dernier mois d'un quadrimestre.

Pour ce premier numéro de 2019, la rubrique Portrait d'un Mathématicien vous présentera un personnage mystérieux et exceptionnel, refusant l'argent et les honneurs, 'Grigori Perelman'. S'ensuivra un témoignage très inspirant rédigé par Rim Hariss, participante aux OIM en 2009. Les cours de ce numéro aborderont la combinatoire et les équations diophantiennes, tous deux très utiles à la préparation aux Olympiades. Les mathématiques prouvent leur utilité également avec la rubrique beauté des mathématiques. En espérant être à la hauteur des attentes des élèves et du public, l'équipe de rédaction vous souhaite une très bonne lecture !

Mouad Moutaoukil

Les 6 membres de l'équipe nationale qui représentera le Maroc aux OIM 2019 en Angleterre :

- Ziad Eddine Oumzil
- Zakaria Ajerame
- Marouane Chafi
- Adam El Oirghi
- Mariam Elkhatri
- Inès Tiali Bouzidi

Sommaire

Mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui

Cours

Beauté des mathématiques

Problèmes

Mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui

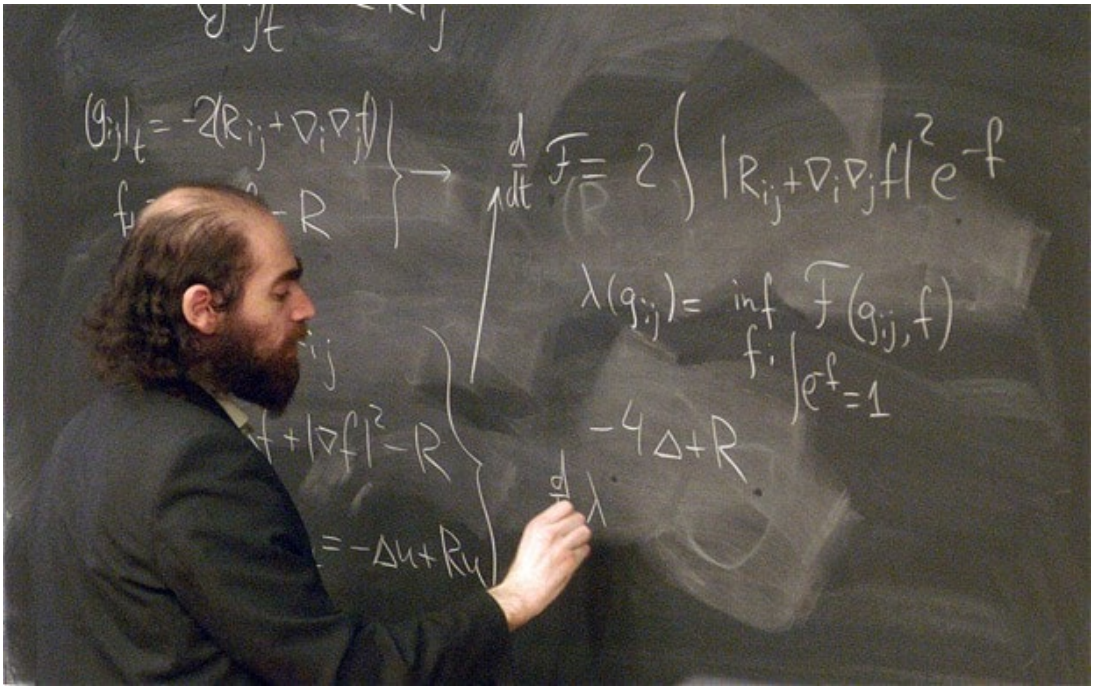
www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 6, 2019

Vol. 1, No. 6, 2019

Portrait d'un mathématicien : Grigori Perelman : le génie transcendant les espèces

Mouad Moutaoukil



Grigori Perelman est un célèbre mathématicien russe né en 1966 à Léningrad. Il est principalement connu pour ses contributions en géométrie riemannienne et en topologie géométrique, notamment des travaux sur le flot de Ricci, qui l'ont amené à résoudre en 2002 la conjecture de Poincaré.

Perelman a commencé à s'intéresser aux mathématiques dès son jeune âge, il a notamment eu la première place aux Olympiades Internationales de Mathématiques en 1982, à l'âge de 16 ans, avec un score parfait. De 1982 à 1987, il a étudié à l'université de Léningrad d'où il est sorti diplômé avec mention d'excellence. Il est ensuite entré comme doctorant à l'Institut de mathématiques Steklov et y a soutenu sa thèse en novembre 1990. Ses recherches portaient alors sur les surfaces en selle de cheval dans des espaces euclidiens. Perelman travailla avec Aleksandr Aleksandrov et Iouri Bourago, puis collabora avec diverses universités de l'Union soviétique avant de revenir à l'Institut Steklov. Ses travaux sur la théorie des espaces d'Alexandrov à courbure minorée ont donné un éclairage nouveau et quasi définitif sur les conditions de régularité minimale pour certains résultats de géométrie riemannienne.

En 1992, il rejoignit l'Institut Courant à New York et l'université d'État de New York à Stony Brook, puis l'université de Californie à Berkeley pendant deux ans entre 1993 et 1995. Malgré des propositions d'emploi de prestigieuses universités américaines telles que Princeton ou Stanford, il a décidé de retourner à Saint-Pétersbourg en 1995. Dès lors, PERELMAN disparut quasi complètement du milieu académique, ne publiant plus aucun travail pendant plus de sept ans.

Le 11 novembre 2002, PERELMAN publie sur la base arXiv un court article de 39 pages. Cette façon de faire est complètement inhabituelle, car il ne passe pas par une revue traditionnelle avec comité de lecture. Il jette ainsi les bases de la démonstration de la conjecture de POINCARÉ qu'il complète en publiant deux autres articles par la même voie. Il faudra six mois aux membres des équipes internationales chargées d'examiner les résultats pour comprendre le raisonnement de PERELMAN, et quatre ans de vérifications au total pour qu'on reconnaisse définitivement qu'il a résolu le mystère de la conjecture. En 2003, il sort enfin du silence en donnant plusieurs conférences aux États-Unis sur le sujet. PERELMAN a bûché seul, enfermé durant près de huit ans, avant de livrer sa preuve de la fameuse conjecture en 2002. Il est retourné dans l'ombre après 2003. Car l'ermite aux cheveux broussailleux et longs refuse tout. Les honneurs et l'argent. Il a notamment refusé le Prix de la société mathématique européenne en 1996, ainsi que la Médaille Fields, équivalent du prix Nobel de Mathématiques. Le 22 août 2006, lors de la remise de la médaille Fields au Congrès International des Mathématiques à Madrid, il ne se présente pas. Il a également décliné le Prix du millénaire de l'Institut de mathématiques Clay qui lui a été attribué en 2010 à la suite de sa preuve de la conjecture de Poincaré, et aussi le million de dollars qui accompagne le prix.

Après une carrière riche en travaux et en contributions mathématiques importantes, PERELMAN s'est progressivement retiré du monde des mathématiques jusqu'à disparaitre totalement en Décembre 2005. Depuis, il fuit les médias et vit seul avec sa vieille mère dans un logement du quartier populaire de Kouptchino

à Saint-Pétersbourg, dénué de tout confort selon les voisins. Il semble avoir abandonné toute recherche en mathématiques. Il a déclaré qu'il « n'avait besoin de rien » à travers sa porte fermée à des journalistes venus lui demander un entretien.

Ce destin, qui rappelle forcément celui en France d'Alexandre Grothendieck (Portrait d'un mathématicien du numéro 3 du Journal), ferait presque de Grigori Perelman un héros de légende : il a vaincu le dragon mais il ne veut ni de la princesse ni du royaume. Il aurait affirmé lors d'une interview – très controversée- : « Pourquoi ai-je mis tant d'années pour résoudre la conjecture de Poincaré ? J'ai appris à détecter les vides. Avec mes collègues nous étudions les mécanismes visant à combler les vides sociaux et économiques. Les vides sont partout. On peut les détecter et cela donne beaucoup de possibilités … Je sais comment diriger l'Univers. Dites-moi alors, à quoi bon courir après un million de dollars ? ».

Perelman a actuellement 53 ans et vit en reclus. Une vie qu'il a choisie. Mais qui aurait pu être tout autre. Car l'homme reste un génie incontestable des mathématiques. « Il a décroché le Graal capable de nous éclairer un jour sur la forme de l'Univers », dit Michel Boileau, un spécialiste de la géométrie.

Vol. 1, No. 6, 2019

Le coin des anciens

Rim Hariss (IMO 2009)

Prélude

Je tiens d'abord à remercier Mouad pour cette belle opportunité de m'adresser dans cette revue ingénue à toutes les personnes fascinées par la beauté inhérente des mathématiques. C'est avec plaisir et beaucoup de nostalgie que je relate mon expérience avec les olympiades internationales en particulier, et les mathématiques en général. L'écriture de ce récit m'a poussé à faire un travail d'introspection que j'estime sain et important pour soi, et pour ce je suis reconnaissante à Math&Maroc.

Comment compare-je les « matheux » d'hier et les « matheux » d'aujourd'hui ? Les faits remontent à un peu près de 10 ans, plusieurs choses ont changé mais une chose dont je suis certaine, la génération d'avant avait tout autant de volonté de réussir et d'amour pour les mathématiques que la génération d'aujourd'hui.

Je fus la seule fille qui a fait partie de l'équipe participante à la 50^{eme} édition des olympiades internationales de mathématiques en Allemagne (Brèmes), et la troisième fille marocaine dans l'histoire des OIM. Ainsi, comprendrez-vous que ce fut un évènement marquant de ma vie d'étudiante et de matheuse. En plus, ce fut une année particulièrement importante dans l'histoire des OIM, un demi-siècle de célébration de mathématiques par des centaines de pays ; de nombreux alumni, mathématiciens illustres et médaillés Fields y ont été à l'honneur. Je garde des souvenirs doux-amers de cette participation que je détaillerai un peu plus tard dans mon récit. Cependant, pour moi, l'aventure mathématique commence bien avant Juillet 2009.

Un début « presque » parfait

Depuis que j'étais toute petite, je fus fascinée par les énigmes mathématiques, et je ne saurais dire si c'est un trait inné de ma personnalité ou si c'est le produit d'une éducation particulière. Au final, le résultat est le même, j'étais dans un défi constant de moi-même. Je me rappelle de ces exercices de manuels au collège, placés à la fin comme « exercices pour un défi ». A l'époque, j'ignorais qu'ils étaient tirés d'épreuves d'olympiades, mais je mettais probablement beaucoup plus d'énergie à les résoudre que ce que je dépensais sur mes devoirs hebdomadaires. Bien évidemment, ces exercices ne furent jamais prescrits par un enseignant comme devoir maison, vus comme intimidants, indéchiffrables et inutiles pour pratiquer les notions inculquées au cours. Cependant, j'avais dans mon coin mon enseignant de mathématiques de 1^{ere} et 3^{eme} année du collège, M. Abderrahmane, qui avait détecté en moi la nature du défi et qui m'encourageait toujours à me dépasser. Il m'avait proposé de lire et corriger mes solutions pour ces fameuses énigmes, et au long du chemin, j'ai appris ce que c'étaient les olympiades de mathématiques.

Je me rappelle vivement de ma première participation aux olympiades de mathématiques. C'est une anecdote bizarre qui a failli ne jamais avoir lieu, et jusqu'à présent je me demande si les choses auraient été différentes pour moi dans le cas échéant. En effet, je venais d'un petit collège à Tanger qui n'avait jamais participé auparavant à ce genre d'activités parascolaires. Mon enseignant m'apprit cependant que chaque année, toutes les délégations de l'éducation nationale organisent des olympiades de maths au niveau des collèges pour les élèves de la 3ème année du collège. Animée par le défi, j'ai fait part au proviseur de ma volonté de participer à la compétition. Grande a été ma déception quand il m'annonça que le collège n'avait pas l'intention de s'inscrire, ne voyant pas d'intérêt à dépenser ses ressources humaines pour faire plaisir à « l'égo » d'une seule élève. En dépit de la pression de mon enseignant, son témoignage de mon niveau (mon bulletin de notes en appui) ainsi que la démonstration de ma motivation, le résultat était néant. On m'expliqua que mes chances d'exceller étaient, de toute façon, statistiquement minimes.

Ma réaction par la suite peut être légitimement décrite comme étant un peu extrême : sous la recommandation de mon enseignant et la volonté de mon père, je change de collège au milieu de l'année scolaire. D'ailleurs je suis éternellement reconnaissante à mon père qui, toujours à mes cotés, n'a jamais était réticent à mes caprices de « matheuse ». Tout ce que j'espérais était qu'on me laisse tenter ma chance, comme tout le monde. J'infiltre par la suite la liste des élèves qui représentent le nouveau collège aux olympiades. Finalement, le destin récompense mon acharnement et je finis sur la tête de la liste des 10 élèves couronnés au niveau de la délégation, recevant comme prix mon premier ordinateur portable. De surcroît, nous serions automatiquement considérés pendant l'an prochain parmi les élèves participant à la première phase de sélection des élèves du tronc commun scientifique.

La leçon dont j'ai tiré de cette aventure presque homérique me suivit tout au long de mon parcours : l'indépendance d'esprit est tout aussi importante que le travail soutenu. Il ne faut surtout pas baisser les bras devant des situations conflictuelles, mais plutôt faire preuve de courage de conviction. Nous avons tous notre propre compréhension de soi et c'est sur quoi nous devons compter le plus.

La phase mathsmaroc.jeun.fr : un tremplin inévitable

J'ai bien conscience que je fais partie d'une longue liste de « matheux » ayant eu comme compagnon de route le forum de mathsmaroc, qui a été très active pendant ma génération. Au cours de mon année de tronc commun, en préparant les épreuves de sélection pour les olympiades, je suis tombée sur une inégalité que je n'arrivais naturellement pas à résoudre toute seule. Je ne savais pas encore qu'il y avait des ressources en ligne pour préparation aux olympiades. Avec deux camarades de classe, on a essayé collectivement de s'entraider mais finalement mes camarades se sont rapidement désintéressés, mon enseignant de tronc commun n'était pas aussi impliqué que son précédent. Cette inégalité m'a hanté pendant un bout de temps et je n'étais pas prête à lâcher prise. Pour une première fois, je fais une recherche en ligne et je tombe par coïncidence sur le saint-graal : un forum pour marocains adeptes des mathématiques, tous niveaux, même pour le collège, encore plus pour les olympiades ! D'ailleurs, par hasard, ce fut la même inégalité qui a mené Farid Mountassir (et probablement autres « matheux ») à ce forum. Ainsi commença pour moi une longue période de participation et de collaboration au sein de ce forum. Je postais régulièrement des exercices d'olympiades ou de devoirs scolaires tout en participant aux challenges proposés par d'autres membres du forum. Ce fut aussi le meilleur endroit pour se tenir au courant des dates importantes et dernières nouvelles d'épreuves d'olympiades. Jouissant d'excellents modérateurs, ce fut aussi un excellent portail pour rencontrer des passionnés de mathématiques, en dehors de mon lycée et de ma région. Certains d'entre eux, dont le chemin a plus tard croisé le mien, sont même devenus de très bons amis. In fin, Je suis très reconnaissante à ce forum grâce auquel j'ai appris l'esprit d'entraide et d'émulation positive et maintenu mon sens du défi tout au long de mes études secondaires.

La route pour la 50^{eme} édition des OIM

Comme mes prédécesseurs et mes successeurs, j'ai dû passer les épreuves des olympiades dès la première année du Baccalauréat. Après chaque épreuve, nous devions attendre quelques mois pour découvrir si nous faisions parti des chanceux qui passent à l'étape suivante des qualifications. Le forum mathsmaroc nous servait de refuge pour nous échanger non seulement les nouvelles des épreuves mais aussi les différentes façons d'y répondre. C'est ainsi que j'ai découvert les manuels proposés par le site Animath.fr, le site officiel des olympiades françaises. Très rapidement, je me suis intéressée à la géométrie et aux équations fonctionnelles, et j'ai appris par la suite l'avantage d'être particulièrement bonne dans une ou deux sous-disciplines mathématiques. Avec un peu de recul, j'aurais passé un peu plus de temps à me perfectionner en arithmétiques aussi. On m'annonça que je faisais parti des élèves qualifiés aux épreuves nationales de la 2^{eme} année du Baccalauréat. Animée par mon rêve d'être parmi les six derniers chanceux, je passe mon été à bouquiner les polycops d'Animath, qui fut à l'époque, le seul site d'olympiades dont j'avais connaissance.

Cependant, notre année fut particulièrement différente. Une fois après avoir passé les deux premiers tests de sélection de la deuxième année du Baccalauréat, nous n'avions plus de nouvelles de la part des académies de l'éducation nationale. Des mois et des mois se sont passés, personne n'avait été averti de sa qualification pour la prochaine épreuve de sélection. Pendant ce temps là, nous nous rendions régulièrement sur le forum pour spéculer des raisons de ce retard. Des rumeurs circulaient qu'exceptionnellement et pour des raisons d'organisation interne, le Maroc ne participerait point aux OIM 2009. Evidemment, ces rumeurs m'avaient jeté, ainsi que tous mes camarades, dans le désarroi. Pourquoi avions-nous la « malédiction » de subir cette décision exceptionnelle ? une première dans les 25 ans d'histoire de participation marocaine aux OIM ! Je voyais mon rêve s'écraser devant mes yeux, moi qui pensait avoir très bien réussi les deux fameuses épreuves de sélection. Advient la fin du mois de Mai, comme un miracle, la malédiction se leva et on nous annonça que six élèves ont été sélectionnés pour participer aux OIM 2009, j'en fus la seule fille. Immense fut ma joie d'apprendre cette nouvelle mais autant fut mon angoisse d'apprendre qu'il y avait aucun stage d'entrainement en vue, par faute de manque de temps. Ainsi, serions-nous la seule promotion qui n'a point pu bénéficier de session d'encadrement. Très déçus, nous nous sommes rendus une seule fois au siège national pour faire connaissance de nos accompagnateurs et pour consolider nos dossiers de demande de visa Schengen. Nous devions nous estimer chanceux d'avoir eu tout de même l'opportunité de représenter le Maroc à l'international, avec toutes les incertitudes qui avaient particulièrement accompagné ce processus cette année là. Nous avions eu droit à un discours d'encouragement et d'apaisement de la part de l'équipe organisatrice. Néanmoins, mes compagnons et moi réalisâmes que nous n'étions point préparés à relever le défi qui nous attendaient à Brèmes dans ci peu de temps.

Parcours Solitaire :

On se dispersa, chacun d'entre nous avait planifié son plan de préparation. J'aie regretté à maintes reprises le temps que j'avais perdu à ne pas me préparer, en pensant que la participation marocaine était annulée.

Une fois les épreuves de baccalauréat terminées, je me penche sur mes polycops d'Animath et sur les exercices de sélection de l'équipe française. Je prends par la suite le courage de survoler la liste courte *(short list)* des exercices d'anciens OIM, tout en me rendant compte de mon manque de préparation et de mon incapacité à assimiler, en ci peu de temps, toutes ces nouvelles astuces que je découvrais à chaque exercice.

Je remarquais qu'il y avait au moins un exercice de combinatoire par épreuve d'OIM. Je les trouvais particulièrement amusants mais très difficiles à résoudre. Ce ne fut pas surprenant, comme ont pu remarquer d'autres participants auparavant, les exercices de combinatoires n'avaient jamais figuré dans les épreuves de sélection marocaines. Personne d'entre nous n'avait été bien préparé pour affronter ce genre d'exercices. Par conséquent, je prends la décision de me concentrer sur les « bases » : vaut mieux perfectionner un cours qu'on connaît que d'apprendre des dizaines nouveaux théorèmes dont on ne cerne pas complètement l'utilité.

Avec le recul, et en lisant les témoignages de mes autres camarades, ce que je déplore le plus -avec l'absence de ces stages préparatifs et le manque d'entrainement en groupe- est notre manque d'information sur le déroulement des épreuves et sur les bonnes pratiques de rédaction des réponses. J'estime, et c'est une opinion que je partage avec mes camardes de l'équipe 2009, que nous aurions tous pu améliorer nos scores individuels si seulement nous disposions de certaines informations cruciales de mise en condition d'épreuve.

Séjour à Brèmes

Brèmes est une charmante petite ville au nord-ouest de l'Allemagne, très proche de la mer du Nord. Bizarrement, je garde des souvenirs éparpillés de notre chemin d'arrivée à Brèmes. Ce fut pour la plupart d'entre nous la première fois qu'on franchit le pas en Europe, et nous étions émerveillés par la beauté du paysage. Je me rappelle du très beau campus universitaire où nous fumes installés et de ma joie d'avoir obtenu une chambre individuelle (très bien équipée), étant la seule fille de l'équipe. Tout au long du séjour, nous étions tous stupéfiés par l'excellente organisation des Allemands. Nous étions très bien accueillis par notre guide qui parlait français. Nous sommes arrivés un ou deux jours avant le premier jour de la compétition et nous nous sommes mis à découvrir la petite ville en marche et en groupe. Ce fût pour nous aussi une façon de nous connaître et de comparer nos stratégies de préparation. Contrairement à moi, mes camarades avaient bien connaissance du site AOPS (Art of Problem Solving) et certains s'étaient entrainés sur la shortlist. Je dissipai les inquiétudes de mon esprit, en choisissant de garder le moral fort.

Malgré les circonstances exceptionnelles qui avaient jusqu'à présent touché la phase de sélection de l'OIM Marocain, j'éprouvais un certain optimisme naïf qui s'est vite effondré une fois nous avons fait pu échanger

avec les autres équipes sur le campus. Je me rappelle encore très bien de nos échanges avec quelques membres sympathiques des équipes polonaises et suisses. Ils nous avaient expliqué qu'ils venaient de rentrer d'un « bootcamp » ou stage intensif de deux mois où ils s'étaient entrainés avec deux autres équipes de pays voisins. Bien évidemment, ils avaient aussi pu bénéficier d'un entrainement adéquat tout au long de l'année, ayant su qu'ils allaient représenter leur pays respectifs une année à l'avance. On pouvait même voir certaines équipes comme celle de la Chine ou de l'Allemagne passer toute la journée à préparer encore pour le jour J.

La cérémonie d'ouverture. Bizarrement encore, je ne me rappelle vraiment pas des détails de la cérémonie d'ouverture en dépit de cette photo qui immortalise le jour. Néanmoins, je me rappelle du discours d'ouverture de la chancelière allemande Angela Merkel qui nous avait fait part de son histoire avec les olympiades (de physique par contre). A l'honneur de la 50^{eme} année des OIM, les allemands ont décidé que les pays soient appelés par ordre de première participation aux OIM, ainsi la Roumanie fut le premier pays appelé. Encore mieux, les médailles seraient fabriquées de métaux réels : or, argent et bronze.

Nous avions pu découvrir les participants. Je me rappelle que toutes les équipes arabes participantes (L'Algérie, la Tunisie, La Syrie, L'Arabie Saoudite) avaient été assignées le même bus, et qu'à travers le commun de la langue ainsi que la similitude de nos stades de préparation (Depuis, l'Arabie Saoudite s'est bien rattrapée en matière d'encadrement et de résultat), nous étions devenus assez amis. Une autre chose qui m'avait marquée fut le très jeune âge de certains candidats : le plus jeune participant était un prodige péruvien et avait 11 ans (et qui a d'ailleurs obtenu une médaille de bronze). En comparaison, on s'est senti assez vieux !

Le 1^{er} jour de la compétition. Nous arrivâmes avec angoisse et de bonne heure à l'immense gymnase réservé à l'épreuve. Venue l'heure, je découvre deux exercices d'arithmétique et un exercice de géométrie. Par affinité, je penche tout d'abord pour un bon bout de temps sur l'exercice de géométrie (problème 2) mais en vain. Je partage ensuite le temps qui me reste entre le premier et troisième exercice, tout en réussissant quelques éléments de réponses du premier problème tout à la fin. L'épreuve finie, nous nous retrouvâmes tous très déçus pour discuter de l'épreuve. Tellement émue par l'amertume, j'explique que j'avais perdu un temps inconcevable sur les deux derniers problèmes sans résultat et que j'avais hélas obtenu la bonne piste pour le premier problème cependant un peu trop tard. Par la suite, les encadrants m'apprennent ce que j'ignorais jusqu'à présent : les exercices sont très souvent ordonnés par difficulté croissante, il aurait été plus judicieux de commencer par le premier exercice et le résoudre jusqu'au bout, stratégie déjà testée et approuvée pour se garantir une mention honorable. Cette information peut sembler tellement évidente pour les lecteurs mais je me suis rendue compte que mon ignorance était due à mon manque de préparation des exercices d'OIM (mon seul vrai point de préparation fut Animath) ainsi qu'à l'absence d'encadrement. Je me promis d'être plus stratège le lendemain, dans l'espérance de pouvoir au moins résoudre le premier exercice.

Le 2^{eme} jour de la compétition. Je retrouve un exercice de géométrie cette fois-ci en premier. Je décide de prendre ma revanche sur la géométrie et je pense l'avoir résolu. Je passe au deuxième exercice qui fut une équation fonctionnelle, je ne me souviens pas des détails de ma solution, mais je me rappelle que j'avais utilisé un théorème assez méconnu et non trivial (dont le nom m'échappe en ce moment malheureusement) pour prouver le résultat. Le troisième exercice, ce fameux exercice de combinatoire qui figure parmi les trois problèmes les plus durs de l'histoire de l'OIM, n'en parlons même pas. Néanmoins, je sors de l'épreuve assez contente. Pour moi, j'ai sécurisé une médaille honorable à travers le premier exercice et accumulé pas mal de points, si ce n'est pas tous les points du deuxième exercice.

L'après épreuves : Une fois les deux épreuves terminées, nous avions droit à des jours de repos où nous avons pu faire connaissance avec d'autres participants ainsi qu'un peu de tourisme de la région. J'étais moins intéressée par le tournoi de foot qui fut organisé que par les excursions. Notre première sortie fut pour la ville de Hambourg où on a pu visiter le musée Miniature Wonderland. Pendant la deuxième sortie nous avions bénéficié d'une visite de la ville historique de Brèmes et finalement, on a eu droit à une excursion finale à destination de l'île de Wangergoog (située au sein de la mer du Nord), où plusieurs jeux de chasse de trésor ont été organisés.

Hambourg

Les célébrations du 50^{eme} anniversaire des OIM : Un point marquant. Le point culminant pour moi de cette participation fut sans doute la chance d'avoir été en présence de six parmi les mathématiciens les plus connus au Monde, certains médaillés Fields (le fameux Terrence Tao et le défunt Jean-Christophe Yoccoz) et tous des lauréats des OIM. Ils ont délivré des discours passionnants, certains sur des problèmes mathématiques connus (Le célèbre problème de poursuite du Lion et de l'Homme, Les problèmes d'OIM ressemblent-ils aux problèmes de recherche ? la théorie des graphes et des réseaux…). Cependant je fus marquée par le discours du mathématicien Terry Tao qui nous avait parlé du monde aléatoire mais structuré des nombres premiers : comment peut-on modéliser les nombres premiers ? comment peut-on les compter et les trouver ? Ce fut la première fois que j'entende parler de probabilité associée aux nombres premiers. Je me suis rendue compte plus tard que c'était grâce à ces discours là que je me suis intéressée dans mes études aux mathématiques appliquées.

Annonce des résultats et cérémonie de clôture : Les résultats furent annoncés et nous ne pouvions nous empêcher d'être très déçus. Nous avons tenu à regarder nos copies et discuter avec nos encadreurs. C'est là que j'avais constaté ma plus grande erreur. Ayant eu le choix de rédiger soit en Arabe ou en Français, j'avais rédigé mes réponses en Arabe. Ce fut pour moi un choix assez naturel ayant fait jusqu'à présent toute ma scolarité de mathématiques en Arabe, et pensant que ça allait faciliter la tâche de correction pour nos encadrants.

Hélas, avec le recul et en comprenant mieux maintenant comment se fait la procédure d'attribution de notes, je sais que ce ne fut point la bonne décision. En effet, on nous informa plus tard que quand la note attribuée n'est pas un 7 clair et net (solution parfaite), les correcteurs sont censés défendre l'attribution des points et la façon dont ils ont corrigé les copies auprès d'un autre comité de correcteurs. Pour les marocains, cette défense se ferait probablement en français auprès de correcteurs francophones. Malheureusement, en écrivant en Arabe, la copie est condamnée à être uniquement lue par les encadrants de l'équipe, étant les seuls capables à la lire et la comprendre. Ainsi, est-ce plus difficile de faire comprendre aux autres les résultats intermédiaires et les détails de la rédaction de l'élève, littéralement perdus en traduction « lost in translation ». Ce fut mon cas, quelques points auraient pu être attribués si la copie fut écrite en Français, elle aurait eu plus de chance d'être bien lue et comprise et par les encadreurs et par le comité.

Une autre source de déception pour moi ainsi que pour quelques uns de mes camarades fut le 1 ou les 2 points arrachés à la suite d'une solution complète, pour des fautes inutiles ou des tournures mal placées. En particulier, ce fut dans mon cas la fameuse réciproque où une phrase du style : « Réciproquement, XX vérifie le problème et en est une solution » m'aurait pu assurer 7 points et une mention honorable. Ce genre de faute d'inattention aurait facilement pu être contourné avec une préparation adéquate des élèves aux conditions de l'examen et bonnes pratiques de rédaction. Pour nombreux d'entre nous, certains résultats intermédiaires peut-être triviales pour les élèves n'ont pas pu être compris et jugés par les encadreurs et par suite par le comité. Bilan : j'ai réussi à me situer en tête de l'équipe avec 9 points mais sans mention honorable du coup. Résultat non satisfaisant pour l'ensemble de l'équipe, mais pas complétement inattendu non plus. Après la cérémonie de clôture, nous primes l'avion de retour à Casablanca.

Chemin du retour

Conclusion et réflexions

Je dois aux mathématiques de m'avoir appris la patience, la rigueur et la persévérance qui sont à mon avis des qualités essentielles non seulement dans le monde des mathématiques, mais aussi dans le monde de tous les jours. Je suis éternellement reconnaissante à cette expérience d'OIM à laquelle j'attribue une grande part de mon acharnement académique post-bac.

En effet, suite aux OIM 2009, j'ai décidé de poursuivre des études en classes préparatoires au Maroc principalement par amour des mathématiques et par envie de défi. Mon parcours m'a guidé vers les grandes écoles (X ou École Polytechnique) où je me suis spécialisée en mathématiques appliquées (Statistiques et mathématiques financières). Finalement, je suis partie vers l'institut de Technologie du Massachussetts (MIT) aux Etats-Unis où je m'apprête à soutenir mon doctorat en recherche opérationnelle (branche de mathématiques appliquées). Ma recherche est liée à l'optimisation poussée par la Data (Data-driven Optimization) et par le Machine Learning pour les problèmes en Pricing et Revenue Management, et pour moi ce fut la meilleure façon de lier les mathématiques aux problèmes du monde réel.

Grâce au monde des olympiades de mathématiques, j'ai pu me créer un cercle d'amis et de camarades avec qui je partage cette passion et cette expérience et que je garde jusqu'à présent. Je tiens à remercier toutes ces personnes ainsi que ma famille, amis proches et surtout mes professeurs de lycée (M Rochdi) et de classes préparatoires (M Ait Elhaj et M Taibi) qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Je félicite l'association Math&Maroc pour ses efforts et son travail impeccable que j'admire, que ce soit cette magnifique revue ou son engagement pour l'encadrement des lycéens pour les OIM et les parcours post-bac. Je ne peux qu'espérer que les élèves soient mieux préparés à affronter les épreuves olympiques, non seulement sur le plan académique mais sur les plans logistique et morale. D'ailleurs, je me réjouis d'apprendre, en lisant les témoignages précédents de mes camarades, que les choses ont bien changé depuis 2009 : Les élèves ont maintenant accès à plus de ressources d'exercices (Art of problem solving, Balkan Mathematics Olympics…), des stages d'entrainement et des illustres entraineurs (Monsieur Aassila), qu'on s'intéresse à la combinatoire dans les épreuves de sélection et qu'on explore des techniques plus avancées pour résoudre les problèmes (notamment en géométrie). Je souhaite à cette association encore plus de succès et je me tiens disponible pour toute aide par la suite. Et pour les jeunes matheux qui me lisent maintenant, ne baissez pas les bras et visez l'excellence dans n'importe quel parcours que vous choisissez, pourvu qu'il inclut les mathématiques !

Cours

www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 6, 2019

Vol. 1, No. 6, 2019

Équations diophantiennes

Abdelkader Benaissat

Introduction

L'étude des équations diophantiennes remonte à l'antiquité grecque. Elles doivent leur nom au mathématicien Diophante d'Alexandrie, qui vivait au 3^{eme} siècle, pour son *Traité d'Arithmétique* concernant ces questions. On appelle équation diophantienne toute équation à coefficients entiers dont les solutions sont des nombres entiers ou des nombres rationnels (c'est-à-dire des fractions p/q où p et q sont des entiers). En général, les équations diophantiennes peuvent faire intervenir une ou plusieurs inconnues.

Notons que les équations diophantiennes, généralement, restent encore un mystère pour les mathématiciens. La résolution de ces équations n'est pas toujours évidente, et les techniques utilisées pour les aborder sont souvent radicalement différentes des techniques utilisées pour attaquer les autres types d'équations.

Notons également que le lecteur est supposé familier avec les définitions des notions basiques de l'arithmétique telles que la division euclidienne, les notions de PGCD et de nombres premiers entre eux, ainsi que les théorèmes de base de la théorie des nombres (Gauss, Bézout, petit Fermat, Chinois...).

1 - Définition et exemples

1.1 - Définition :

Une équation diophantienne est la donnée d'un (ou plusieurs) polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. L'objectif est de la résoudre dans $\mathbb{Q}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \text{ où } F \text{ est un polynôme dans } \mathbb{Z} \text{ et } \forall i \in \{1, ..., n\}\ x_i \neq 0$$

1.2 - Exemples :

Les méthodes utilisées pour résoudre certaines équations diophantiennes ne peuvent généralement pas être utilisées pour résoudre d'autres équations, ce qui fait que chaque équation diophantienne est unique en son genre dans le sens des méthodes utilisées pour la résoudre. On donnera par la suite quelques exemples de ces équations :

– Les équations diophantiennes linéaires (c'est-à-dire de degré 1) en deux variables x et y :

$$ax + by = c\,;\text{ avec } a, b, c \text{ entiers.}$$

C'est l'équation d'une droite du plan. Chercher les solutions $(x; y)$ entières revient donc à chercher les points à coordonnées entières de cette droite ; autrement dit, dans un repère orthonormé, on cherche quand cette droite coupe les nœuds d'un quadrillage formé de carreaux de côtés de longueur 1.

– Des équations de degré plus grand ou ayant un plus grand nombre de variables. Par exemple : l'équation suivante a deux inconnues et est de degré 2 :

$$x^2 + y^2 = 1$$

C'est l'équation du cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé d'origine O. Déterminer les solutions entières $(x; y)$ de cette équation c'est déterminer l'ensemble des points de ce cercle qui sont aux nœuds du réseau.
En ajoutant une variable, on peut considérer l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ (Pythagore)}$$

Les triplets d'entiers (x, y, z) solutions de cette équation sont appelés triplets pythagoriciens en référence à Pythagore : x, y, z sont alors en effet les côtés entiers d'un triangle rectangle. Par exemple, $(3; 4; 5)$ est un triplet Pythagoricien.
Lorsqu'on augmente la puissance des inconnues dans l'équation précédente, on obtient la célèbre équation de Fermat :

$$x^n + y^n = z^n \text{ où } n \text{ est un entier fixé plus grand que 2.}$$

Au dix-septième siècle, Fermat a conjecturé que lorsque $n \geqslant 3$, cette équation n'admet pas de solution entière non triviale c'est-à-dire autre que celles pour lesquelles l'un des entiers $x; y; z$ est nul. Il fallut les travaux de nombreux mathématiciens, l'introduction et le développement de techniques sophistiquées à la croisée de plusieurs domaines des mathématiques (algèbre, géométrie, arithmétique, analyse) avant de pouvoir démontrer cette conjecture.
Notons également que l'affirmation suivante : "lorsque $n \geqslant 3$ il est impossible de trouver trois nombres entiers x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ " est une affirmation purement arithmétique, pourtant sa démonstration actuelle de Andrew Wiles utilise des mathématiques plus compliqués (basés sur les axiomes de ZFC de la théorie des ensembles) en plus de l'arithmétique (basée sur les axiomes de Piano).

1.3 - Problème de Hilbert

Étant donné une équation diophantienne , on peut se demander si elle admet des solutions entières (ou rationnelles) ? Peut-on déterminer s'il y a un nombre fini ou infini de solutions ? Si ce nombre est fini, peut-on en donner une borne ? Peut-on les déterminer, c'est-à-dire en faire la liste si elles sont en nombre fini ou bien en donner une paramétrisation si elles sont en nombre infini ? Peut-on à partir d'une ou plusieurs solutions données, déterminer toutes les autres ?

Dixième problème de Hilbert : Trouver un algorithme déterminant si une équation diophantienne a des solutions.

En effet, Matiyasevich donne en 1970 une réponse définitive a ce problème :

Théorème de Matiyasevich : Il n'existe pas d'algorithme général prédisant si une équation diophantienne donnée admet des solutions (entières).

Cependant, s'il n'existe pas d'algorithme valable pour une équation générale, demeure l'espoir d'élaborer des méthodes pour certaines classes d'équations particulières. Dans la suite de ce cours, nous allons donner un aperçu des cas pour lesquels on dispose de méthodes maintenant classiques de résolution. Nous allons également donner des idées et des heuristiques pour vous aider à trouver la méthode convenable pour chaque équation.

2 - la résolution des equations diophantiennes

Bien qu'en général, les équations diophantiennes soient compliquées, certaines classes sont mieux connues. Par exemple, l'ensemble des équations diophantiennes linéaires est complètement connu.

2.1 - Échauffement : Équations diophantiennes linéaires

On a, pour les équations diophantiennes linéaires à deux variables, le théorème suivant :

Théorème : Soit l'équation diophantienne $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$

(1) Si $PGCD(a; b) = d/c$, l'équation n'admet pas de solutions entières.

(2) Si $PGCD(a; b) = d \nmid c$, il existe une infinité de solutions de la forme :

$$x = (b/d)k + x_0 \,;\; y = (-a/d)k + y_0 \,;\; k \in \mathbb{Z}$$

ou $(x_0; y_0)$ est une solution particulière de l'équation.

Méthode : Généralement, pour résoudre une équation diophantienne de la forme $ax+by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ on utilise la démarche suivante :

1. Déterminer le PGCD d des coefficients a et b et s'assurer qu'il divise le terme constant c.
2. Diviser les coefficients de l'équation par d, pour former l'équation équivalente $a_0x+b_0y = c_0$, avec a_0, b_0 premiers entre eux.
3. En déterminer une solution particulière x_0, y_0, puis toutes les solutions avec $x = x_0 + b_0k$, $y = y_0 - a_0k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

L'étape la plus délicate est la troisième, car elle demande la remontée de l'algorithme d'Euclide et l'obtention d'une solution particulière.

Exemple *(Un exercice type plutôt)* : Pour l'équation (1) :

$$65x + 104y = 26$$

***La première étape* :** On cherche le pgcd des nombres 65 et 104.
L'algorithme d'Euclide donne :

$$65 \wedge 104 = 13$$

Le pgcd est 13 ; il divise le terme constant 26 : $26 = 13 \times 2$.

***La deuxième étape* :** On simplifie les coefficients de l'équation (1), qui devient de façon équivalente (2) :

$$5x + 8y = 2$$

Il est évident que $5 \wedge 8 = 1$.
Donc d'après le théorème de BEZOUT l'équation (2) admet au moins une solution.

***La troisième étape* :**

L'algorithme d'EUCLIDE donne :
$8 = 5 \times 1 + 3$
$5 = 3 \times 1 + 2$
$3 = 2 \times 1 + 1$
$2 = 2 \times 1$

On part du pgcd 1 et on *remonte* en remplaçant les restes successifs :
$1 = 3 - 2$
$1 = 3 - (5 - 3)$
$1 = -5 + 3 \times 2$
$1 = -5 + 2 \times (8 - 5)$
$1 = 5 \times (-3) + 8 \times 2$

Ainsi, $x = -3$ et $y = 2$ forment une solution de l'équation $5x + 8y = 1$;donc une solution particulière de l'équation (2) est $x_0 = -6$, $y_0 = 4$ d'où on en déduit que toutes les solutions de l'équation (1) sont données par :

$$(x = -6 + 8k; y = 4 - 5k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque *(l'échauffement est terminé !)* : Le théorème ci-haut ne se généralise malheureusement pas aux autres types d'équations diophantiennes polynomiales. En général, pour résoudre une équation diophantienne, on essaye d'utiliser les outils suivants :

2.2 - Factorisation et propriétés élémentaires de l'arithmétique

Les techniques de la factorisation, le théorème fondamental de l'arithmétique, les propriétés des entiers et la notion de divisibilité sont tous essentiels pour la résolution des équations diophantiennes. Rappelons tout de suite quelques propriétés qu'il est bon d'avoir constamment en tête :

• Si le produit ab est une puissance d'un nombre premier p, alors a et b sont également des puissances de ce nombre premier. Si le produit ab est une puissance d'un entier n, il peut être intéressant de décomposer n en facteurs premiers.

• La factorisation : elle est très utile lorsque l'on a besoin de modifier l'aspect d'une équation diophantienne, le plus souvent en faisant des manipulations algébriques ou en se basant sur des identités remarquables telle que :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$$

et si n est impair :

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$$

Notez également que toute expression de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta$ peut en général se factoriser sous la forme : $(ax + b)(cx + d) + e$.

• Lorsque l'équation a un nombre réduit d'inconnues, des techniques d'inégalités peuvent permettre de restreindre l'étude à un nombre fini de cas. Lorsque l'exercice est résolvable de cette façon, ce nombre est généralement petit, et on peut donc traiter ces cas un par un.

Exemples :

1− Cherchons dans un premier temps à résoudre l'équation suivante :

$$3^n + 9 = x^2$$

Après une simple manipulation algébrique et une factorisation appropriée on obtient :

$$3^n = (x+3)(x-3)$$

et donc d'après une des propriétés rappelées précédemment, à la fois $x+3$ et $x-3$ doivent être des puissances de 3. Or, des puissances de 3 qui diffèrent de 6, il n'y a que 3 et 9. Donc $x = 6$ est la seule solution, et fournit $n = 3$.

2− Un autre exemple illustrant le dernier principe : trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tel que $3n + 7$ divise $5n + 13$.
On remarque que le quotient $\dfrac{5n+13}{3n+7}$ est toujours compris strictement entre 0 et 2 (pourquoi ?) et donc, comme il est entier, il ne peut en fait valoir que 1. Il ne reste alors plus qu'à résoudre l'équation $5n+13 = 3n+7$ qui admet pour solution $n = -3$. Donc le seul entier répondant à notre question est $n = -3$.

Exercice : Trouver tous les entiers strictement positifs x, y et z tels que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Solution : Comme les inconnues jouent un rôle symétrique, on peut supposer $0 < x \leqslant y \leqslant z$. Dans ces conditions, on a :

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{x}$$

et donc $x \leqslant 3$. Il ne peut valoir 1 (pourquoi ?), il vaut donc 2 ou 3. On traite les deux cas séparément en utilisant à nouveau la même méthode. Si $x = 2$, l'équation devient :

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

puis par le même argument $x = 2 \leqslant y \leqslant 4$. On teste alors les cas un par un et on trouve que les seules solutions sont $y = 3$, $z = 6$ et $y = 4$, $z = 4$. Pour $x = 3$, on obtient :

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

puis $x = 3 \leqslant y \leqslant 3$. La seule solution est, dans ce cas, $x = y = 3$. Finalement, les solutions sont les triplets (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3) et toutes leurs permutations.

2.3 - Utilisation des congruences

Le problème majeur qui nous intéresse, pour une équation diophantienne donnée, est de savoir si elle admet des solutions ou non. Si oui, en existe-t-il une infinité ? La méthode la plus efficace (souvent) pour cela est l'utilisation des congruences.

1 - Point méthode : Pour prouver qu'une équation diophantienne n'admet pas de solution on la considère modulo un entier n et on montre qu'elle n'a pas de solution dans cette nouvelle situation.
La difficulté de cette méthode réside dans le choix d'un entier n convenable pour amener une contradiction lorsqu'on examine cette équation modulo n.

Exemple : Montrez que l'équation suivante n'admet pas de solutions :

$$x^2 = 4k + 3$$

On suppose qu'il existe un couple (x, k) solution ; Donc elle vérifie la relation suivante :

$$x^2 \equiv 4k + 3 \equiv 3 \ mod(4)$$

or il n'existe aucun $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 \equiv 3 \ mod(4)$, sinon il existe $a \in \mathbb{Z}$ tq : $x \equiv a \ mod(4)$ Donc $x^2 \equiv a^2 \ mod(4)$ Donc $a^2 = 3$ Donc $a = \sqrt{3}$ absurde.

2 - Heuristiques :

♣ **Lorsque l'équation fait intervenir des carrés :** Il est souvent intéressant de regarder modulo 3, 4, voire 8 ou 16 ... et on raisonne en gardant en tête ce qui suit :

1- $a^2 \equiv \{0, 1\} \mod 3$
2- $a^2 \equiv \{0, 1\} \mod 4$
3- $a^2 \equiv \{0, 1, 4\} \mod 8$
4- $a^2 \equiv \{0, 1, 4, 9\} \mod 16$
5- $a^2 \equiv \{0, \pm 1\} \mod 5$
6- $a^2 \equiv \{0, 1, 3, 4\} \mod 6$
7- $a^2 \equiv \{0, 1, 2, 4\} \mod 7$
8- $a^2 \equiv \{0, 1, 4, 7\} \mod 9$

Afin de bien assimiler ces points, on va donner une démonstration pour le deuxième et le troisième :

Carré modulo 4 : Tout carré est congru modulo 4 à 1 s'il est pair, 0 s'il est pair, c'est à dire si un nombre $x \in \mathbb{Z}$ telle que $x = 2k + 1$ alors $x^2 \equiv 1 \mod 4$, et si $x = 2k$ alors $x^2 \equiv 0 \mod 4$.

Démonstration :

- Cas où n est impair donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$, on a donc $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, le reste dans la division par 4 est 1.
- Cas où n est pair donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ telle que $n = 2k$, $(2k)^2 = 4k^2$ est divisible par 4.

Carré modulo 8 : Tout carré est congru modulo 8 à 1 s'il est impair, 0 ou 4 s'il est pair ; 0 si n divisible par 4, 4 sinon.

Démonstration :

- Cas où n est impair $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$, on a donc $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$. Or k et $k + 1$ sont deux nombres consécutifs, l'un d'eux est pair. Leur produit $k(k + 1)$ est divisible par 2, et $4k(k + 1)$ est divisible par 8. Donc $4k(k + 1) + 1 \equiv 1 \mod 8$.
- Cas où n est pair donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ telle que $n = 2k$, $(2k)^2 = 4k^2$ est divisible par 4, donc par 8 avec reste 0 ou 4.
- Cas où n est divisible par 4, donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ telle que $n = 4k$, d'où $(4k)^2 = 16k^2$ est divisible par 16 et a fortiori par 8.

De façon plus générale, si p est un nombre premier et que l'équation fait intervenir des puissances de p, il peut être intéressant de considérer modulo p^2 ou p^3, voire de plus grandes puissances.

♣ **Si l'équation fait intervenir un terme de la forme a^n (où a est fixé et n est l'inconnue) :** on pourra également considérer l'équation modulo a, a^2, a^3, etc. Ainsi, le terme en question va s'annuler à partir d'une certaine valeur de n. Plus explicitement si on a un terme de la forme 3^n, on essaie modulo 3, 9, et ainsi de suite.

De façon plus générale, si une constante, semble-t-il un peu étrange, intervient comme un facteur multiplicatif, il peut être opportun de considérer l'équation modulo cette constante. En effet, on se débarrassera ainsi du terme correspondant.

♣ **Encore si l'on a un terme de la forme a^n (où a est fixé et n est l'inconnue) :** on peut chercher modulo m un diviseur de $a^k - 1$ pour un certain entier k (par exemple $k = 1$). En effet, dans ce cas, on aura $a^k \equiv 1 \mod m$) et donc la suite des a_n modulo m sera périodique de période k. Ainsi si k n'est pas choisi trop grand, le terme a^n ne pourra prendre qu'un petit nombre de valeurs modulo m. Par exemple, dans le cas des puissances de 2, on pourra choisir m = 3, m = 5 ou m = 31.

Notez bien : Ces heuristiques données précédemment ne sont pas toujours utiles. Parfois, il est préférable de suivre son intuition.

Exemples :

Exercice : Trouver les solutions entières de l'équation diophantienne : $x^2 = 3y^2 + 8$

Solution : Si (x ; y) est une solution, alors en particulier

$$x^2 \equiv 3y^2 + 8 \mod 3$$

C'est-à-dire

$$x^2 \equiv 2 \mod 3$$

Mais, $x^2 \equiv \{0, 1\} \mod 3$. Donc, la dernière équation est impossible. Donc, l'équation $x^2 = 3y^2 + 8$ n'admet pas de solutions entières.

Exercice : Montrer que la seule solution de l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = 7z^2$ $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ est $x = y = z = 0$.

Solution : On suppose que $xyz \neq 0$. On note d le PGCD de $x; y; z$ et on pose $(x_0; y_0; z_0) = (x/d; y/d; y/d)$ il suit que $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \mod 7$. et ainsi 7 divise x_0 et y_0 et donc 7^2 divise $7z^2$ d'où 7 divise z_0 ce qui est une contradiction. Si $z = 0$ il suit de la positivité de $x^2 + y^2$ que $x = y = 0$. Et si $z \neq 0$ et $xy = 0$ on peut supposer par symétrie que $y = 0$ et ainsi $x^2 = 7z^2$, ainsi $2v_7(x) = 1 + 2v_7(z)$, ce qui est une contradiction.

2.3 - Descente infinie

Description de la méthode : La descente infinie est une méthode introduite et abondamment utilisée par Fermat. Le but est de prouver qu'une certaine équation diophantienne n'admet pas de solutions. Pour cela, on part d'une solution hypothétique et on en construit une nouvelle, strictement plus petite dans un certain sens. On obtiendrait ainsi une suite strictement décroissante de solutions, ce qui n'est en général pas possible.

Exemple : Un premier exemple simple qui illustre ce principe fait partie de la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On est amené à considérer l'équation :

$$a^2 = 2b^2$$

On prouve que a est pair puisque b l'est, et on voit que $(a/2, b/2)$ est une nouvelle solution. D'autre part si $b \neq 0$, on a $|b/2| < |b|$ (voici notre condition de décroissance).

Ainsi, si l'on part d'une solution (a_0, b_0) avec $b_0 \neq 0$, on peut construire une nouvelle solution (a_1, b_1) (en l'occurrence $a_1 = a/2$ et $b_1 = b/2$) avec $|b_1| < |b_0|$. Puis on continue, on construit (a_2, b_2), (a_3, b_3), et ainsi de suite. On construit ainsi une suite (b_i) telle que :

$$|b_0| > |b_1| > |b_2| > ...$$

Ce qui constitue une contradiction, car il n'existe aucune suite infinie d'entiers positifs strictement décroissante. Ainsi on a forcément b = 0 puis directement $a = 0$, et $\sqrt{2}$ est à nouveau irrationnel.

Application 1 : Trouver tous les entiers x, y et z tels que : $x^3 + 9y^3 = 3z^3$

Solution : On suppose que l'équation a une solution (x, y, z) distincte du triplet $(0, 0, 0)$. Cela implique que x^3 est multiple de 3, et donc x l'est aussi. Donc il existe x' telle que $x = 3x'$ et l'équation devient (après simplification par 3) :

$$9x'^3 + 3y^3 = z^3$$

et on déduit de cela que z est multiple de 3. On écrit $z = 3z'$, l'équation devient :

$$3x'^3 + y^3 = 9z'^3$$

et on obtient 3 divise y. Posons $y' = y/3$. On vérifie que le triplet (x', y', z') est encore solution de l'équation de départ et qu'il est plus petit dans le sens :

$$|x'| + |y'| + |z'| < |x| + |y| + |z|$$

Le principe de descente infinie permet alors de conclure que l'unique solution est $x = y = z = 0$.

Application 2 : Le principe de descente infinie s'applique dans des situations différentes. L'exemple le plus classique est celui du cas particulier de l'équation de Fermat pour n = 4 :

Problème : Montrons qu'il n'existe aucun triplet (x, y, z) d'entiers strictement positifs tels que $x^4+y^4 = z^4$.

Pour résoudre le problème ci-dessus nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme (Triplets pythagoriciens) : Soient x, y et z des entiers positifs premiers entre eux dans leur ensemble vérifiant :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Alors, soit x, soit y est pair. Dans le cas d'où c'est x qui l'est, il existe des entiers m et n premiers entre eux et de parité contraire tels que $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ et $z = m^2 + n^2$.

Démonstration : Si d est un diviseur commun de x et y, alors d^2 divise $x^2 + y^2$ et donc z^2. Ainsi d divise z et d est un diviseur commun de x, y et z et d'après l'hypothèse $d = 1$. Finalement, x et y sont premiers entre eux. De même on prouve que x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.

Si x et y étaient tous les deux impairs, on aurait $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \mod 4$, et donc $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \mod 4$, ce qui est impossible. Au moins l'un des deux est pair. Supposons que ce soit x et écrivons $x = 2x'$. L'équation devient alors :

$$4x'^2 = (z - y)(z + y)$$

Les deux facteurs $z-y$ et $z+y$ sont de même parité et donc tous les deux pairs. En outre, si d est un diviseur commun de $z - y$ et de $z + y$, il divise leur somme et leur différence, c'est-à-dire $2z$ et $2y$ et donc 2 puisque y et z sont premiers entre eux. Cela prouve que les entiers $\dfrac{z-y}{2}$ et $\dfrac{z+y}{2}$ sont premiers entre eux. Leur produit est un carré, ce sont donc tous les deux des carrés :

$$\frac{z-y}{2} = m^2 \,;\, \frac{z+y}{2} = n^2$$

pour m et n des entiers positifs premiers entre eux. En reportant dans l'équation, il vient $x^2 = 4m^2n^2$ puis $x = 2mn$ (puisque x est supposé positif). Finalement m et n sont de parité contraire, car sinon y et z seraient tous deux pairs.

Résolution du problème : Supposons qu'un tel triplet existe. Déjà on peut supposer que x, y et z sont premiers entre eux dans leur ensemble, sinon on obtient directement une solution plus petite en divisant par le PGCD. Dans ces conditions, en appliquant le théorème précédent, et quitte à échanger les rôles de x et de y, il existe des entiers m et n premiers entre eux tels que :

$$x^2 = 2mn \,;\, y^2 = m^2 - n^2 \,;\, z = m^2 - n^2$$

La deuxième égalité fournit $m^2 = n^2 + y^2$ et les entiers m, n et y sont premiers entre eux dans leur ensemble. En outre, y est impair (puisque x est pair), et donc le théorème précédent s'applique et donne l'existence d'entiers u et v premiers entre eux tels que :

$$n = 2uv \,;\, y = u^2 - v^2 \,;\, m = u^2 + v^2$$

On obtient $x^2 = 2mn = 4uv(u^2 + v^2)$. Si d est un diviseur commun de u et de $u^2 + v^2$, il divise v^2 et donc vaut 1 puisque u et v sont premiers entre eux. Ainsi les nombres u, v et $u^2 + v^2$ sont premiers entre eux deux à deux et leur produit est un carré. Chacun d'eux est alors un carré et il existe des entiers x', y' et z' tels que :

$$u = x'^2 \, ; \, v = y'^2 \, ; \, u^2 + v^2 = z'^2$$

On tire directement de là $x'^4 + y'^4 = z'^2$ et donc une nouvelle solution.

D'autre part, on a l'argument de descente :

$$z' \leqslant z'^2 = m < m^2 + n^2 = z$$

l'inégalité stricte résultant du fait que $n > 0$ (x étant supposé non nul). Cela conclut la preuve.

Vol. 1, No. 6, 2019

Fonctions en combinatoire

Saad Choukri

Introduction. Les notions présentées dans ce cours sont abordables pour un élève du tronc commun. On traite les applications et leurs propriétés, leurs liens avec le dénombrement et les applications combinatoires. Plusieurs techniques combinatoires sont évoquées dans ce cours, notamment le principe des tiroirs, le principe de bijection, le lemme des bergers, le double comptage. A la fin du cours, vous trouverez quelques exercices olympiques illustrant les techniques évoquées.

1 - Généralités sur les applications

Dans tout ce qui suit, E et F désignent deux ensembles non vides.

Définition. Une application f de E vers F est une relation binaire reliant chaque élément x de E à un unique élément y de F et on écrit $y = f(x)$.

Définition(Injectivité). Soit $f : E \to F$ une application. On dit que l'application f est injective si chaque élément de F admet au plus un antécédent de E par l'application f. Autrement dit, pour tout x et y éléments de E, l'égalité $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$.

❀ Exemples.
➳ L'application $f_1 : n \in \mathbb{N} \mapsto \sqrt{n+1} - 2 \in \mathbb{R}$ est injective. En effet, soient m et n deux entiers naturels tels que $f_1(n) = f_1(m)$, ceci entraîne $\sqrt{n+1} - 2 = \sqrt{m+1} - 2$, ce qui implique $n = m$.
➳ L'application $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 3$ n'est pas injective. En effet, on a $f_2(-1) = f_2(1) = 4$ mais $-1 \neq 1$.

Définition(Surjectivité). Soit $f : E \to F$ une application. On dit que l'application f est surjective si tout élément de F est l'image d'un élément de E. Autrement dit, si pour tout $y \in F$, il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

❀ Exemples.
➳ L'application $g_1 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[, \quad x \mapsto x^2 + 1$ est surjective. En effet, pour tout $y \in [1, +\infty[$ il existe $x = \sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$ tel que $y = g_1(x)$.
➳ L'application $g_2 : x \in \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-3}$ n'est pas surjective car $2 \in \mathbb{R}$, pourtant l'équation

$g_2(x) = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Définition(Bijectivité). Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application bijective si tout élément de F admet exactement un antécédent par l'application f.

❀ Remarque. Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

2 - Applications et dénombrement

Avant de présenter le lien entre le dénombrement et les applications, nous présentons le principe de multiplication parfois dit <<principe fondamental de dénombrement>>.

Théorème(Principe de multiplication).
Considérons p événements $E_1, E_2, ..., E_p$. Supposons qu'il y a n_1 façons de réaliser l'événement E_1, n_2 façons de réaliser l'événement E_2,..., et n_p façons de réaliser l'événement E_p. Alors, il y a $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$ façons pour réaliser tous les événements $E_1, E_2, ..., E_p$.

❀ Commentaire. Un événement lié à une expérience aléatoire est un ensemble dont les éléments sont des résultats possibles pour cette expérience.

Démonstration. Si $p = 1$, le résultat est vrai par évidence. Montrons d'abord le résultat pour le cas $p = 2$. On se donne deux événements E et F tel qu'il y a n façons pour réaliser E et m façons pour réaliser F. Il s'agit de compter le nombre de manières de former un couple (e, f) avec $e \in E$ et $f \in F$. Fixons un élément $e \in E$, il y a m façons pour former le couple (e, f), mais quand e parcourt l'ensemble E, on peut remplir un tableau $n \times m$ tel que chaque case contienne un couple (e, f) avec $e \in E$ et $f \in F$. Par conséquent, on peut former $n \times m$ couples (e, f) tels que $e \in E$ et $f \in F$. Pour $p \geq 3$, une récurrence immédiate permet de montrer le résultat.

❀ Exemple. Soient $n \geq 2$ un entier naturel et $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_m^{\alpha_m}$ la décomposition en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs positifs de l'entier n ?

Solution. Soit d_n le nombre en question. Un diviseur de n s'écrit sous la forme $p_1^{\beta_1} \times ... \times p_m^{\beta_m}$ où pour tout i, on a $\beta_i \in \{0, 1, ..., \alpha_i\}$. Il y a $\alpha_1 + 1$ valeurs possibles pour β_1,...,$\alpha_m + 1$ valeurs possibles pour β_m. Donc, par le principe de multiplication, il y a $(\alpha_1 + 1) \times ... \times (\alpha_m + 1)$ pour former un diviseur de n. Finalement $d_n = (\alpha_1 + 1) \times ... \times (\alpha_m + 1)$.

Définition(Permutation). Étant donné un ensemble fini E. Une permutation de E est une bijection de E vers E.

❀ Remarque. Une permutation d'un ensemble $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ où n un entier naturel non nul est une suite finie $(s_1, ..., s_n)$ tel que pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$, il existe un unique $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $s_i = a_j$.

❀ Notation. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est dit cardinal de E, on le note souvent $|E|$ ou $\text{Card}\, E$.

Proposition. Soit E un ensemble fini. Le nombre de permutations de E vers E est $n!$.

❀ Notation. Soit n un entier naturel non nul, l'entier naturel $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ est dit factorielle de n et

on le note $n!$. On écrit par convention $0! = 1$.

Démonstration. Écrivons $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, il s'agit de compter le nombre de façons de former une permutation $\sigma = (s_1, s_2, ..., s_n)$ de E. Il y a n manières différentes pour donner une valeur à s_1, puis $n-1$ manières différentes pour donner une valeur à s_2 (on élimine la valeur prise par s_1), ..., une seule manière pour choisir s_n. Donc, d'après le principe de multiplication, il y a $n \times (n-1) \times ... \times 1 = n!$ pour construire la permutation σ. Ce qu'il fallait démontrer.

❀ Remarque. Soit n un entier naturel non nul. Si $(s_1, s_2, ..., s_n)$ est une permutation de l'ensemble $\{a_1, ..., a_n\}$ où les a_i sont des nombres réels, alors on a $s_1 + ... + s_n = a_1 + ... + a_n$ et $s_1 \times ... \times s_n = a_1 \times ... \times a_n$.

Proposition. Soient E et F deux ensembles finies non vides. Si il existe une application injective qui envoie E vers F, alors le nombre d'éléments de l'ensemble E est inférieur à celui de l'ensemble F.

❀ Commentaire. C'est un résultat intuitif ! En effet, si on peut injecter un ensemble E dans un ensemble F, alors par définition d'une injection f, tout élément de F admet au plus un antécédent par f, et ceci exprime que les éléments de E sont moins nombreux que ceux de F.

Démonstration. Donnons nous une injection $f : E \to F$. Procédons par l'absurde en supposant que $|E| > |F|$, par conséquent on a $|E| \geq |F| + 1$. Ceci exprime (d'après le principe des tiroirs) qu'il existe deux éléments distincts de E qui ont même image par l'application f, mais ceci contredit le caractère injectif de l'application f. Ce qui achève la démonstration.

Définition. Étant donné un ensemble non vide E. Une partition de cet ensemble est une famille de sous ensembles non vides de E disjoints dont la réunion vaut E.

❀ Remarque. Si $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partition d'un ensemble fini E, alors il résulte que $|E| = |E_1| + ... + |E_n|$.

Proposition. Soient E et F deux ensembles finis non vides. S'il existe une application $f : E \to F$ surjective. Alors, le nombre d'éléments de l'ensemble E est supérieur à celui de l'ensemble F.

❀ Commentaire. C'est un résultat intuitif ! En effet, s'il existe une surjection $f : E \to F$, alors tout élément de F admet au moins un antécédent par l'application f, ce qui exprime que les éléments de E sont plus nombreux que ceux de F.

Démonstration. Pour tout élément $y \in F$, on note $f^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des antécédents de y par l'application. Par définition d'une application surjective, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est non vide. De plus, les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ sont disjoints (par définition d'une application) et finalement la réunion de tous les ensembles $f^{-1}(\{y\})$ vaut E. Autrement dit, la famille des $f^{-1}(\{y\})$ pour y parcourant F constitue une partition de E. Par conséquent

$$|E| = \sum_{y \in F} |f^{-1}(\{y\})| \geq \sum_{y \in F} 1 = |F|$$

Le théorème qui suit est le théorème principal de cette section, on l'appelle «principe de la bijection».

Théorème(Principe de la bijection).
Soient E et F deux ensembles non vides finis. S'il existe une bijection de E vers F, alors les ensembles E et F ont le même nombre d'éléments.

❀ Commentaire. Le principe de la bijection est un principe d'importance capitale. En effet, si deux ensembles finis sont en bijection, ils ont même cardinal. Ainsi, pour compter le nombre d'éléments d'un ensemble il *suffit* de le mettre en bijection avec un ensemble dont le nombre d'éléments est déjà connu. L'intuition derrière, est que chaque élément de F peut être associé à un et un seul élément de E, il résulte qu'il y a autant d'éléments dans F que dans E.

Démonstration. Donnons nous une bijection $f : E \to F$. La preuve repose sur le fait que le cardinal de l'ensemble E est à la fois supérieur et inférieur à celui de l'ensemble F, puisque l'application $f : E \to F$ est à la fois injective et surjective.

❀ Exemple. Soit E l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$. On dit qu'un couple (x, y) d'éléments de E est *bon* si n divise $x + 2y$. Montrer que le nombre de bons couples (x, y) avec $x > y$ est égal au nombre de bons couples (x, y) avec $x < y$.

Solution. Soient A l'ensemble de bons couples (x, y) avec $x > y$ et B l'ensemble de bons couples (x, y) avec $x < y$. Soit f l'application de A vers B qui à un couple $(x, y) \in A$ associe le couple $(n - x, n - y) \in B$. D'abord, l'application f est bien définie. De plus, l'application est injective et est surjective par construction. Par conséquent, f est une bijection. Donc $|A| = |B|$ et ceci achève la démonstration.

Proposition. Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal et $f : E \to F$ une application. L'application f est injective si et seulement si elle est surjective.

❀ Commentaire. Cette proposition permet de montrer qu'une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective en montrant qu'elle est injective ou surjective.

Démonstration. Supposons que f est injective et montrons qu'elle est surjective. Il s'agit donc de montrer que $f(E) = F$. On sait que $f(E) \subset F$, et $|f(E)| = |E| = |F|$ et par conséquent, $f(E) = F$, autrement dit tout élément y de F est image d'un élément de E par f, l'application f est alors surjective. Supposons maintenant que f est surjective et montrons qu'elle est injective. C'est immédiat, en effet il suffit de remarquer que si $f(E)$ et E ont le même cardinal, alors f est injective (car les images des éléments de E sont deux à deux distincts), mais on sait que $|f(E)| = |F| = |E|$. D'où le résultat.

Théorème(Nombres d'injections entre deux ensembles finis).
Soient E et F deux ensembles non vides de cardinaux respectifs n et m tel que $n \leq m$. Alors le nombre d'applications injectives de E vers F est $\dfrac{m!}{(m-n)!}$.

Démonstration. On pose $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Il s'agit de compter le nombre des n-uplets $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$ qu'on peut former où les $f(a_i) \in F$ et f une application injective. L'injectivité de f permet de dire que les $f(a_i)$ sont différents deux à deux. L'élément $f(a_1)$ peut prendre m valeurs, l'élément $f(a_2)$ peut prendre $m - 1$ valeurs (on élimine la valeur prise par $f(a_1)$),..., l'élément $f(a_n)$ peut prendre $m - n + 1$ valeurs. Donc par le principe de multiplication, on peut former $m \times (m-1) \times ... \times (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ n-uplets $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$ où les $f(a_i) \in F$ et f une application injective.

❀ Remarque. Le nombre $m!/(m-n)!$ est noté A_m^n. Il désigne le nombre de façons d'arranger n objets dans m tiroirs.

3 - Principe des bergers et quelques applications

LEMME(DES BERGERS). Soient E et F deux ensembles non vides finis et $f : E \to F$ une application. Si tout élément de F admet exactement n antécédents par l'application f, alors le nombre d'éléments de E est celui de F multiplié par n.

❀ COMMENTAIRE. La nomination de ce principe trouve son origine dans la situation suivante ; *Un berger ne voyant que les pattes de ses moutons pourra déterminer le nombre d'animaux en divisant le nombre de pattes par quatre.*

Démonstration. Soit $y \in F$, on note $f^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des éléments de F qui ont y pour image par l'application f. Notons que pour tout $y \in F$, $|f^{-1}(\{y\})| = n$. Or, on sait que (puisque les $f^{-1}(\{y\})$ partitionnent E)

$$|E| = \sum_{y \in F} |f^{-1}(\{y\})| = \sum_{y \in F} n = n|F|$$

D'où le résultat.

❀ REMARQUE. Remarquer que le principe de la bijection est une conséquence du principe des bergers (pour le cas $n = 1$).

PROPOSITION. Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, ..., n\}$ un entier naturel. Le nombre de parties de E de cardinal k est noté $\binom{n}{k}$ et il vaut $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

❀ COMMENTAIRE. Étant donné n objets, le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ représente le nombre de façons de tirer k objets parmi ces n objets.

Démonstration. On se fixe un entier naturel $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Notons A l'ensemble des parties de E de cardinal k et B l'ensemble des $k-$uplets formés d'éléments $\in E$. On sait que $|B| = A_n^k$, on considère l'application $f : B \to A$ qui à un k-uplet $(b_1, b_2, ..., b_k)$ associe l'ensemble $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ (elle est bien définie). Donc, il y a autant d'antécédents de $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ que de permutations de l'ensemble $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$. En résumé, tout élément de A admet exactement $k!$ antécédents par l'application f. Par conséquent, $|B| = k!|A|$, autrement dit $|A| = |B|/k! = n!/k!(n-k)!$.

❀ EXEMPLE. Soit n un entier naturel non nul et $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Montrer en utilisant de la combinatoire que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Solution. L'identité mise en question veut dire qu'étant donné un ensemble E de cardinal n, le nombre de parties de E de cardinal k est égal au nombre de parties de E de cardinal $n-k$. On se donne un ensemble E de cardinal n, et notons A et B l'ensemble des parties de E de cardinaux respectifs k et $n-k$. Pour un sous ensemble X de E, soit X^C le complémentaire de X dans E (c-à-d l'ensemble des éléments appartenant à E et n'appartenant pas à X -qui peut être éventuellement vide-). Soit $\phi : A \to B$ l'application qui à un élément $X \in A$ associe X^C. L'application ϕ est bien définie, de plus ϕ est une bijection. En effet, il est clair que ϕ est injective, de plus ϕ est surjective par construction. En résumé, les deux ensembles A et B sont en bijection. Par conséquent

$$\binom{n}{k} = |A| = |B| = \binom{n}{n-k}$$

D'où le résultat.

❀ Exemple. $2n$ joueurs de tennis participent à un tournoi. Au premier tour, tous les joueurs jouent exactement une fois et tous les matchs sont simples. Combien y a-t-il de possibilités de répartir les joueurs pour les n matchs du premier tour ?

Solution. On peut choisir le premier couple de joueurs par $\binom{2n}{2}$ façons, le deuxième couple par $\binom{2n-2}{2}$ façons,..., le n-ième couple par une seule façon. On peut pas dire que le nombre cherché est

$$\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times ... \times 1$$

puisqu'on a numéroté les couples, donc en vertu du principe des bergers on doit diviser par $n!$. Donc le nombre recherché est

$$\frac{\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times ... \times \binom{2}{2}}{n!} = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$$

Proposition. Soient a et b deux nombres réels. Alors on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Si $b = 0$, on a bien sûr la formule. Supposons $b \neq 0$, en divisant les deux membres de l'égalité par b^n, on trouve

$$(c+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^k \qquad (*)$$

où $c = a/b$. Montrons par un argument combinatoire la formule $(*)$. Notons c_k le coefficient de c^k où $0 \leq k \leq n$ dans le développement de $(c+1)^n$. Nous obtenons c^k en effectuant $\underbrace{c \times c \times ... \times c}_{k}$, donc c_k est le nombre de manières de choisir k, $(1+c)$ parmi n, $(1+c)$ dans le produit $(1+c)^n$, il s'en suit que $c_k = \binom{n}{k}$. D'où $(*)$.

4 - Principe du double comptage

Ce principe appelé parfois *calcul double* repose sur le fait de compter de deux manières différentes la même quantité.

❀ Exemple. Montrer par une manière combinatoire que pour tout entier naturel non nul n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Solution. Pour $k \in \{0, 1, .., n\}$, le nombre $\binom{n}{k}$ représente le nombre de parties de l'ensemble $\{1, 2, .., n\}$ de cardinal de k. Donc, le côté gauche de l'identité demandée représente le nombre de parties de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$. Il s'agit donc de montrer que le nombre de parties de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ est 2^n. Notons que

$\{0,1\}^n$ est de cardinal 2^n. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de l'ensemble $\{1,2,...,n\}$. Considérons l'application $\varphi : \mathcal{P} \to \{0,1\}^n, \quad A \mapsto (\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ avec $\epsilon_i = 0$ si $i \in A$ et $= 1$ si $i \notin A$. L'application φ est bien définie, surjective et on vérifie facilement qu'elle est injective. Donc φ réalise une bijection de $\mathcal{P}$ vers $\{0,1\}^n$. Il en résulte d'après le principe de la bijection que $|\mathcal{P}| = 2^n$ et ceci achève la démonstration.

❀ Exemple. Soit n un entier naturel non nul. Montrer, d'une manière combinatoire, que pour tout entier $k \in \{1,2,...,n\}$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Solution. On va compter de deux manières différentes le nombre de parties de $\{1,2,...,n\}$ de cardinal k avec un élément distingué appelé *chef*. D'une part, on peut d'abord choisir la partie (il y a $\binom{n}{k}$ pour le faire) puis choisir le *chef* (il y a k manières pour le faire), donc d'après le principe de multiplication on il y a $k\binom{n}{k}$ façons pour construire une telle partie. D'autre part, on peut d'abord choisir le chef (il y a n façons pour le faire) puis choisir la partie (contenant ce chef) et il y a $\binom{n-1}{k-1}$ façons pour le faire, donc par le principe de multiplication il y a $n\binom{n-1}{k-1}$ façons pour construire une telle partie. D'où la conclusion.

5 - Problèmes d'entraînement

Problème 1. Soient $n, m \geq 2$ deux entiers naturels. Soit S un ensemble de cardinal n et $A_1, ..., A_m$ des sous ensembles de S. On suppose que pour tous deux éléments $x \neq y$, il existe $1 \leq i \leq m$ tel que $x \in A_i$ et $y \notin A_i$. Prouver que $n \leq 2^m$.

Problème 2. Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres réels tous distincts où $n \geq 2$ un entier naturel. Quel est le nombre de façons par lesquelles on peut placer les a_i autour d'un cercle ?

Problème 3. Combien y a-t-il de possibilités de poser côte à côte 5 livresbleus et 7 livres rouges sur une étagère si deux livres bleus ne peuvent jamais se trouver côte à côte ? (On considère que deux livres de même couleur sont indistinguables).

Problème 4. Prenons un n-gone convexe dans lequel il n'y a pas de triple de diagonales se coupant en un même point intérieur (qui n'appartient pas au bord). Déterminer le nombre de points d'intersection de deux diagonales à l'intérieur du n-gone.

Problème 5 (Chine 1992). On suppose qu'il y a $n \geq 6$ points sur un cercle tel que chaque paire de points est relié par un segment, et chaque trois segments ne sont pas concourantes à l'intérieur du cercle. Déterminer le nombre de triangles à l'intérieur du cercle.

Problème 6 (Hongkong 1994). Dans un lycée, il y a b professeurs et c élèves tels que chaque professeur enseigne

exactement k élèves et chaque deux élèves ont exactement h professeurs en commun. Prouver que

$$\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$$

Problème 7 (Chine 1991). Soit M l'ensemble $\{1, 2, ..., 1000\}$. Pour tout sous ensemble non vide X de M, on note λ_X la somme du plus petit élément de X et du plus grand élément de X. Déterminer la moyenne arithmétique de tous les λ_X.

La beauté des mathématiques

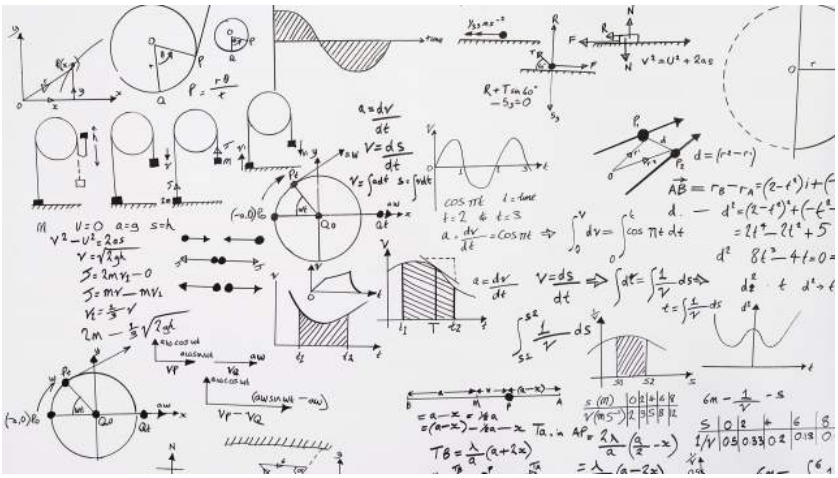
www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 6, 2019

Vol. 1, No. 6, 2019

À quoi servent les mathématiques ?

Abdelkader Benaissat



Introduction :

Le mathématicien selon Platon « est un oiselier capturant dans une volière des oiseaux aux brillantes couleurs », et selon le mathématicien hongrois Paul Erdös « c'est quelqu'un qui prenant une tasse de thé est capable d'en faire une théorie ».

Certes, ce n'est pas facile d'être mathématicien, c'est un métier (ou loisir) strictement intense, être mathématicien signifie être courageux face à des problèmes incontournables, avoir le souffle de rester des heures, des jours, des mois et même des années en essayant de trouver une petite flamme pour éclairer le chemin d'une nouvelle 'vérité éternelle'.

Être mathématicien signifie, entre autres, pouvoir affronter des questions du genre : « Mais, les maths servent à quoi en fait ? », « c'est quoi l'utilité des maths ? » ... Et pour qu'on se concentre sur notre vrai objectif qui n'est autre que la résolution des problèmes, on doit répondre à ces questions une fois pour toute ; sachant que beaucoup d'élèves et d'étudiants se posent ces questions, et il est parfois complexe d'y apporter une réponse convaincante sans en donner des usages concrets dans la vie de tous les jours. Nous essayerons dans cet article de vous donner quelques réponses afin de vous éclairer le chemin.

D'abord, pourquoi les gens détestent les maths ?

La mathématique n'est pas une discipline naturelle ; elle demande un entrainement, un effort surnaturel de courage face au doute et aux impasses. Peut-être que Nicolas Copernic a eu raison lorsqu'il avait dit : « Les mathématiques ne sont écrites que pour les mathématiciens ». En effet, quoiqu'il soit très facile de voir la beauté d'un tableau de Da Vinci sans être peintre, ou toucher et sentir la créativité et l'harmonie d'une pièce de Beethoven ou Chopin sans aucun savoir à propos des notes ou des gammes, on a généralement besoin d'un tas de pré-acquis et de concepts, des signes et des objets mathématiques, pour arriver à franchir le mur menant à sa beauté intrinsèque ; et pouvoir sentir les joies intellectuelles qu'elle donne.

Plus concrètement, prenons l'exemple de l'identité d'Euler (qui a été le sujet de cette rubrique dans le 3^{eme} numéro du Journal), il est strictement indispensable de connaitre la signification de chaque symbole et son origine pour arriver à assimiler la magie de cette fameuse formule :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

« C'est la combinaison improbable de ces cinq constantes qui rend belle cette équation » - Cédric Villani

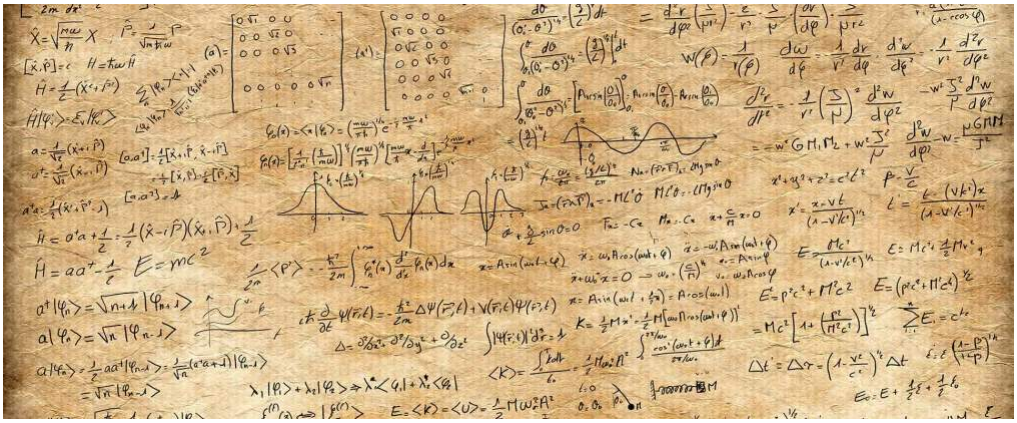
Les mathématiques sont partout :

La réponse la plus simple est que les mathématiques servent à vivre au 21^{eme} siècle ; regardons autour de nous, les mathématiques sont partout. Sans mathématiques, tout ce progrès scientifique de l'humanité n'aurait pas eu lieu. Sans géométrie par exemple, l'architecture actuelle n'aurait pas été aussi sophistiquée et impressionnante. Sans théorème de Thalès, on n'aurait pas pu effectuer les estimations de calcul pour des distances inaccessibles comme la hauteur d'un immeuble, donc difficile de voir naître La tour Eiffel, la tour Khalifa ou Le pont de Brooklyn.

De même, l'évolution de nos moyens de transports sans mathématiques aurait sans doute été minime ; il y'a même de grandes chances -qu'on ne pourra calculer sans la science des probabilités- qu'ils soient les mêmes utilisés par nos ancêtres. Il n'y aurait pas eu de voitures et encore moins un GPS et déjà, le fonctionnement des moyens de transport ancestraux requiert des maths. En effet, même en utilisant la boussole, le sextant ou l'astrolabe, on a besoin de beaucoup de trigonométrie, qui permet de déterminer à quelle distance on se situe par rapport à un point fixe ou dans quelle direction on doit se diriger.

« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques. » Blaise Pascal

Les mathématiques pour découvrir le monde :



Laurent Schwartz, le premier lauréat français de la médaille Fields, a répondu lorsqu'on lui avait demandé : « Pourquoi faire des mathématiques ? », par : « Parce que les mathématiques, ça sert à faire de la physique. La physique, ça sert à faire des frigidaires. Les frigidaires, ça sert à y mettre des langoustes, et les langoustes, ça sert aux mathématiciens, qui les mangent et sont alors dans de bonnes dispositions pour faire des mathématiques, qui servent à la physique, qui sert à faire des frigidaires, qui … ». Laurent Schwartz a su répondre à la question à sa façon, mais on peut en donner d'autres, probablement plus complètes et compréhensibles.

L'Homme, depuis sa venue sur Terre, cherche à comprendre le monde, à découvrir les secrets cachés de l'univers, voire les multivers, pour vaincre ses peurs en particulier la peur de l'inconnu, assouvir son instinct d'exploration, vivre le présent comme il le faut, et s'ajuster à l'ordre cosmique afin de mettre sa personne en harmonie avec le monde. Si la mère des sciences, la philosophie, est l'amour de la sagesse alors le roi des sciences - comme Gauss l'a nommé - sera le désir et la quête de la sagesse. « La logique est l'hygiène des mathématiques » disait André Weil

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu}$$

Équation du champ d'Einstein qui décrit comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps.

Il est vrai que la science, quelle qu'elle soit, n'a un sens que lorsqu'elle nous fait mieux comprendre à la nature, en se basant sur l'intuition et surtout sur un raisonnement inattaquable, les mathématiques servent donc à contrôler cette intuition et ce raisonnement pour contourner les pièges de ce monde magnifique où nous vivons. La grande force des mathématiques, c'est qu'elles sont basées sur une logique incontestable ce qui rend ses résultats des vérités éternelles impossibles à être mises en question par l'expérience et l'observation.

Problèmes

www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 6, 2019

Vol. 1, No. 6, 2019

Exercices corrigés

Exercice 1 (Canada 2018). Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations

$$\begin{cases} y = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 3 \\ x = 4y^3 + 12y^2 + 12y + 3. \end{cases}$$

Solution. Soit (x, y) une solution du système. On a

$$y + 1 = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 4(x + 1)^3$$

D même, on obtient

$$x + 1 = 4(y + 1)^3$$

Les changements de variables $X = x + 1$ et $Y = y + 1$ fournissent $Y = 4X^3$ et $X = 4Y^3$, donc $Y = 4^4Y^9$, c'est à dire $Y = 0$ ou $(2Y)^8 = 1$, donc $Y = 0$ ou $(2Y)^2 = 1$. Finalement $Y \in \{0, 1/2, -1/2\}$, et ceci équivalent à dire que $y \in \{-1, -1/2, -3/2\}$ et de même on montre que $x \in \{-1, -1/2, -3/2\}$. Réciproquement, on vérifie que les couples $(-3/2, -3/2)$ et $(-1/2, -1/2)$ et $(-1, -1)$ sont les uniques solutions du système. Donc l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(-3/2, -3/2), (-1/2, -1/2), (-1, -1)\}$$

Exercice 2. Trouver tous les entiers naturels n pour lesquels, on a

$$\sqrt{1 + 5^n + 6^n + 11^n} \in \mathbb{N}$$

Solution. On va montrer que l'unique entier naturel vérifiant cette propriété est $n = 0$. Il est clair que $n = 0$

solution du problème. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$, il s'agit de montrer que $1 + 5^n + 6^n + 11^n$ ne peut pas être un carré parfait. Le chiffre des unités de l'entier naturel 5^n est 5, le chiffre des unités de l'entier naturel 6^n est 6 et le chiffre des unités de l'entier naturel 11^n est 1, donc le chiffre des unités de l'entier naturel $1 + 5^n + 6^n + 11^n$ est 3. Donc, l'entier naturel $1 + 5^n + 6^n + 11^n$ ne peut pas être le carré d'un entier naturel. Ce qui fallait démontrer.

Exercice 3. Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \geq \frac{5}{2}$$

Solution. Écrivons

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}=\underbrace{\frac{x^2+y^2}{xy}}_{A}+\frac{xy}{x^2+y^2}=A+\frac{1}{A}$$

Notons que $A\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}=2$. Il s'agit de montrer que $A+1/A\geq 5/2$, ce qui est équivalent à montrer que $2A^2-5A+2\geq 0$, c'est à dire $(2A-1)(A-2)\geq 0$ et ceci est vrai puisque $A\geq 2$.

Exercice 4. Dans le plan, on considère un nombre fini de polygones tels que deux quelconques ont un point commun. Montrer alors qu'il existe une droite ayant une intersection non vide avec chacun des polygones.

Solution. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les polygones et $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan. Lorsqu'on projette C_i sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ parallèlement à $(O, \overrightarrow{j})$, on obtient un segment $[a_i, b_i]$ où a_i et b_i deux réels. Comme deux cercles quelconques ont un point commun, les segments les segments $[a_i, b_i]$ ont un point commun deux à deux. Soit a le plus grand réel parmi les a_i. On remarque que $a\in[a_i, b_i]$ pour tout $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Par conséquent, la droite Δ d'équation $x=a$ intersecte chacun des cercles C_i.

Exercice 5. Trouver les entiers x, y et z tels que

$$x^3+9y^3=z^3$$

Solution. On part d'une solution éventuelle (x, y, z) distincts du triplet $(0, 0, 0)$. L'équation implique que x est un multiple de 3. Mais alors $x=3x'$ et l'équation devient après simplification par 3,

$$3x'^3+y^3=9z'^3$$

et on déduit de cela que z est un multiple de 3. On écrit $z=3z'$, l'équation devient

$$3x'^3+y^3=9z'^3$$

et on obtient que y est multiple de 3. Posons $y=3y'$, on vérifie que le triplet (x', y', z') est encore solution de l'équation de base et qu'il est plus petit que le triplet (x, y, z) dans le sens

$$|\,x'\,|+|\,y'\,|+|\,z'\,|<|\,x\,|+|\,y\,|+|\,z\,|$$

Le principe de la descente infinie permet alors de conclure que l'unique solution de l'équation de départ est le triplet $(0, 0, 0)$.

Exercice 6 (États unis). Déterminer les solutions entières non nuls de l'équation

$$(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$$

Solution. L'équation diophantienne ci-dessus est équivalente à

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x = 0$$

Cette équation admet une solution si et seulement si sont discriminant $x(x+1)^2(x-8)$ est un carré parfait, il s'en suit que $x(x-8)$ est un carré parfait, i.e. $x(x-8) = z^2$ donc $(x-4)^2 - z^2 = 16$. Ceci fournit $x \in \{-1, 8, 9\}$ et alors $(x, y) \in \{(-1, -1), (8, -10), (9, -10), (9, -21)\}$. La réciproque donne

$$S = \{(-1, -1), (8, -10), (9, -10), (9, -21)\}$$

Exercice 7 (Italie 1994). Trouver tous les entiers x et y pour lesquels

$$y^2 = x^3 + 16$$

Solution. Soit (x, y) une éventuelle solution de l'équation $y^2 = x^3 + 16$, qui s'écrit encore $(y-4)(y+4) = x^3$. Si y est impair, alors $y-4$ et $y+4$ sont premiers entre eux et donc ils sont des cubes parfaits impairs distants de 8, ce qui n'existe pas. Donc $y = 2y'$ est pair, et par suite $x = 2x'$ est pair aussi. L'équation devient donc

$$(y'+2)(y'-2) = 2x'^3$$

Donc $y'+2$ ou $y'-2$ est pair, puisque $y'+2$ et $y'-2$ ont même parité, alors ils sont tous les deux pairs, et par suite y' est pair, il s'en suit que x' est également est pair. Donc on peut récrire $y' = 2s$ et $x' = 2t$. Il vient $(s+1)(s-1) = 4t^3$, par suite $s+1$ et $s-1$ sont pairs, donc $s = 2u+1$ est impair, et l'on obtient finalement $u(u+1) = t^3$. Puisque u et $u+1$ sont premiers entre eux, cela impose que tous les deux soient des cubes, et par suite $u = -1$ ou 0 et $t = 0$. En remontant, on trouve que l'équation de base possède exactement deux solutions $(0, -4)$ et $(0, 4)$.